Feladat 1. Legyen $\mathbf{G}$ csoport, $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \leq \mathbf{G}$. Igazoljuk, hogy

$$|H_1H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|}.$$

Megoldás: Belátjuk, hogy H_1H_2 minden eleme pontosan $|H_1 \cap H_2|$ módon áll elő h_1h_2 alakban ($h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$).

Egy ilyen előállítás definíció szerint létezik. Minden $g \in H_1 \cap H_2$ esetén $h_1h_2 = h_1g \cdot g^{-1}h_2$ egy másik megfelelő előállítás. Nyilván különböző g-kre ez különböző előállítást ad.

Az kell még, hogy minden előállítás ilyen alakú. Tegyük fel, hogy k_1k_2 egy másik előállítása h_1h_2-nek. Ekkor $h_1^{-1}k_1 = h_2k_2^{-1}$, tehát $g_0 := h_1^{-1}k_1 \in H_1 \cap H_2$. Mivel $k_1 = h_1g_0$ és $k_2 = g^{-1}h_2$, a $k_1k_2 = h_1g_0 \cdot g_0^{-1}h_2$ előállítás is a megfelelő alakú.

Feladat 2. Adja meg a $\mathbf{V}$ csoport automorfizmusait, és azok rendjeit. Milyen csoporttal izomorf $\mathbf{V}$ automorfizmuscsoportja?

Megoldás: $\mathbf{V}$ minden automorfizmusa az egységelemet az egységelembe kell, hogy vigye, ezen túl viszont nincs kikötés: az i, j, k elemek tetszőleges permutációja automorfizmust ad (ezt elég az (ijk) és az (ij) permutációkra leellenőrizni, mert ezek generálják a többit). Így $\mathrm{Aut}\,\mathbf{V} \cong \mathbf{S}_3$, a fellépő rendek pedig $1, 2, 2, 2, 3, 3$.

Feladat 3. Hány $\mathbf{D}_4 \to \mathbf{D}_6$ homomorfizmus van?

Megoldás: A homomorfizmusokat a lehetséges magok szerint osztályozzuk. Ezek $\mathbf{D}_4$ normálosztói.

- Ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1\}$, akkor $\mathrm{Im}\,\varphi \cong \mathbf{D}_4/\{1\} \cong \mathbf{D}_4$. Mivel $|D_4|$ nem osztja $|D_6|$-ot, $\mathbf{D}_6$-nak nincs $\mathbf{D}_4$-gyel izomorf részcsoportja. Tehát ilyen homomorfizmus nincs.
- Ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1, a^2\}$, akkor $\mathrm{Im}\,\varphi \cong \mathbf{D}_4/\{1, a^2\} \cong \mathbf{V}$. Hány $\mathbf{V}$-vel izomorf részcsoportja van $\mathbf{D}_6$-nak? Egy csoport két eleme akkor és csak akkor generál $\mathbf{V}$-vel izomorf részcsoportot, ha különbözőek, mindkettő másodrendű, és felcserélhetőek. A $\mathbf{D}_6$-ban hét másodrendű elem van: a^3 (a középpontos tükrözés) és a hat tengelyes tükrözés. Ezek közül a^3 mindenki mással felcserélhető, a tengelyes tükrözések közül pedig azok cserélhetők fel, amelyek tengelyei egymásra merőlegesek: t és a^3t, at és a^4t, a^2t és a^5t. Így kilencféleképpen tudunk két olyan elemet választani, amik $\mathbf{V}$-vel izomorf részcsoportot generálnak. De minden ilyen részcsoportot háromszor számoltunk, hiszen $\mathbf{V}$-t háromféleképpen lehet két másodrendű elemével generálni. Tehát $\mathbf{D}_6$-nak három $\mathbf{V}$-vel izomorf részcsoportja van. Mivel $\mathbf{V}$-nek hat automorfizmusa van, $3 \cdot 6 = 18$ olyan $\mathbf{D}_4 \to \mathbf{D}_6$ homomorfizmus lesz, amelynek magja $\{1, a^2\}$.
- Ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1, a, a^2, a^3\}$, akkor $\mathrm{Im}\,\varphi \cong \mathbf{D}_4/\{1, a, a^2, a^3\} \cong \mathbb{Z}_2$. Mivel $\mathbb{Z}_2$-nek csak egy automorfizmusa van, $\mathbf{D}_6$-nak pedig hét másodrendű eleme, és így hét $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf részcsoportja, ebben az esetben 7 homomorfizmust kapunk.
- Ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1, t, a^2, a^2t\}$, akkor $\mathrm{Im}\,\varphi \cong \mathbf{D}_4/\{1, t, a^2, a^2t\} \cong \mathbb{Z}_2$, és megint csak 7 homomorfizmust kapunk.
- Ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1, at, a^2, a^3t\}$, akkor $\mathrm{Im}\,\varphi \cong \mathbf{D}_4/\{1, at, a^2, a^3t\} \cong \mathbb{Z}_2$, és megint csak 7 homomorfizmust kapunk.
- Ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbf{D}_4$, akkor egyetlen homomorfizmust kapunk, a triviálist.

Így összesen 40 homomorfizmus van.

MAG	KÉP	1φ	$a\varphi$	$a^2\varphi$	$a^3\varphi$	$t\varphi$	$at\varphi$	$a^2t\varphi$	$a^3t\varphi$
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,t,a^3t\}$	1	a^3	1	a^3	t	a^3t	t	a^3t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,t,a^3t\}$	1	a^3	1	a^3	a^3t	t	a^3t	t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,t,a^3t\}$	1	t	1	t	a^3	a^3t	a^3	a^3t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,t,a^3t\}$	1	t	1	t	a^3t	a^3	a^3t	a^3
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,t,a^3t\}$	1	a^3t	1	a^3t	a^3	t	a^3	t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,t,a^3t\}$	1	a^3t	1	a^3t	t	a^3	t	a^3
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,at,a^4t\}$	1	a^3	1	a^3	at	a^4t	at	a^4t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,at,a^4t\}$	1	a^3	1	a^3	a^4t	at	a^4t	at
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,at,a^4t\}$	1	at	1	at	a^3	a^4t	a^3	a^4t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,at,a^4t\}$	1	at	1	at	a^4t	a^3	a^4t	a^3
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,at,a^4t\}$	1	a^4t	1	a^4t	a^3	at	a^3	at
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,at,a^4t\}$	1	a^4t	1	a^4t	at	a^3	at	a^3
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,a^2t,a^5t\}$	1	a^3	1	a^3	a^2t	a^5t	a^2t	a^5t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,a^2t,a^5t\}$	1	a^3	1	a^3	a^5t	a^2t	a^5t	a^2t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,a^2t,a^5t\}$	1	a^2t	1	a^2t	a^3	a^5t	a^3	a^5t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,a^2t,a^5t\}$	1	a^2t	1	a^2t	a^5t	a^3	a^5t	a^3
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,a^2t,a^5t\}$	1	a^5t	1	a^5t	a^3	a^2t	a^3	a^2t
$\{1,a^2\}$	$\{1,a^3,a^2t,a^5t\}$	1	a^5t	1	a^5t	a^2t	a^3	a^2t	a^3
$\{1,a,a^2,a^3\}$	$\{1,a^3\}$	1	1	1	1	a^3	a^3	a^3	a^3
$\{1,a,a^2,a^3\}$	$\{1,t\}$	1	1	1	1	t	t	t	t
$\{1,a,a^2,a^3\}$	$\{1,at\}$	1	1	1	1	at	at	at	at
$\{1,a,a^2,a^3\}$	$\{1,a^2t\}$	1	1	1	1	a^2t	a^2t	a^2t	a^2t
$\{1,a,a^2,a^3\}$	$\{1,a^3t\}$	1	1	1	1	a^3t	a^3t	a^3t	a^3t
$\{1,a,a^2,a^3\}$	$\{1,a^4t\}$	1	1	1	1	a^4t	a^4t	a^4t	a^4t
$\{1,a,a^2,a^3\}$	$\{1,a^5t\}$	1	1	1	1	a^5t	a^5t	a^5t	a^5t
$\{1,t,a^2,a^2t\}$	$\{1,a^3\}$	1	a^3	1	a^3	1	a^3	1	a^3
$\{1,t,a^2,a^2t\}$	$\{1,t\}$	1	t	1	t	1	t	1	t
$\{1,t,a^2,a^2t\}$	$\{1,at\}$	1	at	1	at	1	at	1	at
$\{1,t,a^2,a^2t\}$	$\{1,a^2t\}$	1	a^2t	1	a^2t	1	a^2t	1	a^2t
$\{1,t,a^2,a^2t\}$	$\{1,a^3t\}$	1	a^3t	1	a^3t	1	a^3t	1	a^3t
$\{1,t,a^2,a^2t\}$	$\{1,a^4t\}$	1	a^4t	1	a^4t	1	a^4t	1	a^4t
$\{1,t,a^2,a^2t\}$	$\{1,a^5t\}$	1	a^5t	1	a^5t	1	a^5t	1	a^5t
$\{1,at,a^2,a^3t\}$	$\{1,a^3\}$	1	a^3	1	a^3	a^3	1	a^3	1
$\{1,at,a^2,a^3t\}$	$\{1,t\}$	1	t	1	t	t	1	t	1
$\{1,at,a^2,a^3t\}$	$\{1,at\}$	1	at	1	at	at	1	at	1
$\{1,at,a^2,a^3t\}$	$\{1,a^2t\}$	1	a^2t	1	a^2t	a^2t	1	a^2t	1
$\{1,at,a^2,a^3t\}$	$\{1,a^3t\}$	1	a^3t	1	a^3t	a^3t	1	a^3t	1
$\{1,at,a^2,a^3t\}$	$\{1,a^4t\}$	1	a^4t	1	a^4t	a^4t	1	a^4t	1
$\{1,at,a^2,a^3t\}$	$\{1,a^5t\}$	1	a^5t	1	a^5t	a^5t	1	a^5t	1
$\mathbf{D}_4$	$\{1\}$	1	1	1	1	1	1	1	1

Feladat 4. Hány $\mathbf{S}_5 \to \mathbf{Q}$ homomorfizmus van?

Megoldás: Az $\mathbf{S}_5$ csoport egy generátorrendszere: $[(12345),(12)]$. Ezen elemek képei meghatároznak egy homomorfizmust. Az (12345) ötödrendű elem, ezért képe vagy elsőrendű, vagy ötödrendű. Mivel $\mathbf{Q}$-nak nincs ötödrendű eleme, ezért minden φ homomorfizmusra $(12345)\varphi = 1$. Az (12) képe első-, vagy másodrendű lehet, tehát $(12)\varphi = 1$ vagy $(12)\varphi = -1$. Előbbi esetben a φ a triviális homomorfizmus. Utóbbi esetben φ egyértelműen meghatározható: egy $\sigma \in S_5$ permutáció képe 1 lesz, ha felírva egy olyan szorzatként, amelynek összes tényezője (12345) vagy (12), az (12) tényzők száma páros, egyébként pedig $\sigma\varphi = -1$. Kérdés, hogy az így megadott leképezés egyrészt konzekvens-e (σ különböző felírásai esetén ugyanazazt adja $\sigma\varphi$-nek), másrészt homomorfizmus-e. A válasz igen: φ a páros permutációkat 1-be, a páratlanokat -1-be viszi–ez pedig homomorfizmus.

Feladat 5. Adjuk meg a következő művelettáblával megadott csoport részcsoport- és normálosztóhálóját.

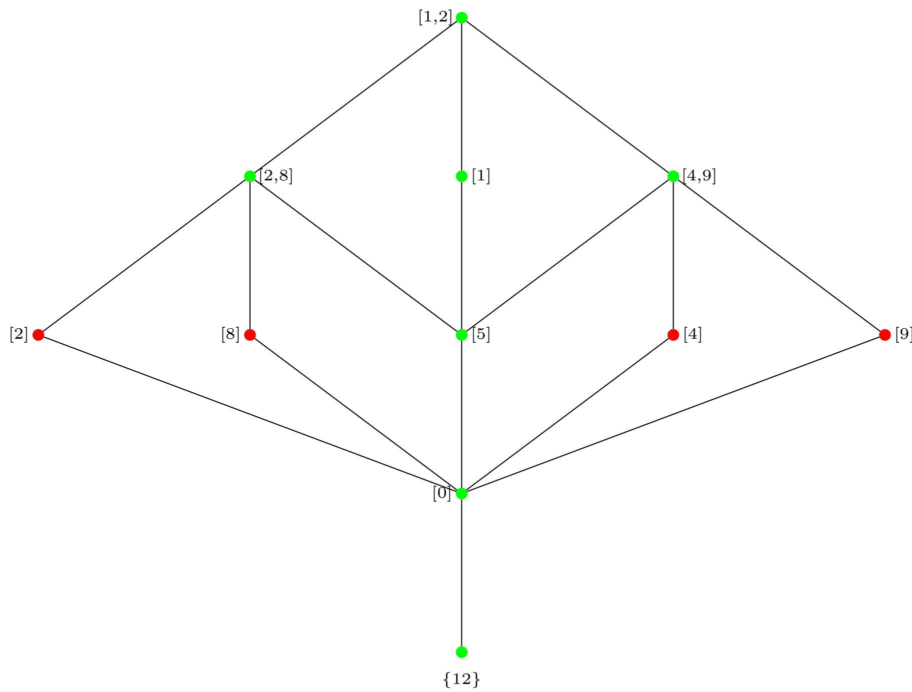
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	12	10	3	2	11	6	5	13	15	14	1	4	0	7	9	8
1	10	5	14	9	2	7	13	0	11	15	6	3	1	12	8	4
2	3	4	0	12	10	15	8	9	5	13	11	1	2	14	7	6
3	2	11	12	0	1	8	15	14	6	7	4	10	3	9	13	5
4	11	15	7	13	0	9	14	3	1	6	8	12	4	2	5	10
5	6	7	8	15	14	0	12	10	3	4	13	9	5	1	11	2
6	5	13	15	8	9	12	0	1	2	11	7	14	6	10	4	3
7	13	0	11	4	8	10	1	6	9	2	12	15	7	5	3	14
8	15	14	6	5	13	2	3	4	0	1	9	7	8	11	10	12
9	14	3	1	10	5	11	4	8	13	0	2	6	9	15	12	7
10	1	6	9	14	3	13	7	12	4	8	5	2	10	0	15	11
11	4	8	13	7	12	14	9	2	10	5	15	0	11	3	6	1
12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
13	7	12	4	11	15	1	10	5	14	3	0	8	13	6	2	9
14	9	2	10	1	6	4	11	15	7	12	3	5	14	8	0	13
15	8	9	5	6	7	3	2	11	12	10	14	13	15	4	1	0

Megoldás: Ez egy 16 rendű csoport, és elég különös: mindössze egyetlen másodrendű eleme van (a 0). Így minden nemtriviális részcsoport tartalmazni fogja a $\{0, 12\}$ részcsoportot, ami normálosztó, hiszen tetszőleges elemmel való konjugáltja egy másodrendű részcsoport, abból pedig nincsen másik.

Mivel csak a részcsoport- és a normálosztóháló $\{0, 12\}$ feletti részét kell kiszámítani, használhatjuk a megfeleltetési tételt. Nézzük meg a csoport e normálosztó szerinti faktorát:

	$\{0,12\}$	$\{1,10\}$	$\{2,3\}$	$\{4,11\}$	$\{5,6\}$	$\{7,13\}$	$\{8,15\}$	$\{9,14\}$
$\{0,12\}$	$\{0,12\}$	$\{1,10\}$	$\{2,3\}$	$\{4,11\}$	$\{5,6\}$	$\{7,13\}$	$\{8,15\}$	$\{9,14\}$
$\{1,10\}$	$\{1,10\}$	$\{5,6\}$	$\{9,14\}$	$\{2,3\}$	$\{7,13\}$	$\{0,12\}$	$\{4,11\}$	$\{8,15\}$
$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{4,11\}$	$\{0,12\}$	$\{1,10\}$	$\{8,15\}$	$\{9,14\}$	$\{5,6\}$	$\{7,13\}$
$\{4,11\}$	$\{4,11\}$	$\{8,15\}$	$\{7,13\}$	$\{0,12\}$	$\{9,14\}$	$\{2,3\}$	$\{1,10\}$	$\{5,6\}$
$\{5,6\}$	$\{5,6\}$	$\{7,13\}$	$\{8,15\}$	$\{9,14\}$	$\{0,12\}$	$\{1,10\}$	$\{2,3\}$	$\{4,11\}$
$\{7,13\}$	$\{7,13\}$	$\{0,12\}$	$\{4,11\}$	$\{8,15\}$	$\{1,10\}$	$\{5,6\}$	$\{9,14\}$	$\{2,3\}$
$\{8,15\}$	$\{8,15\}$	$\{9,14\}$	$\{5,6\}$	$\{7,13\}$	$\{2,3\}$	$\{4,11\}$	$\{0,12\}$	$\{1,10\}$
$\{9,14\}$	$\{9,14\}$	$\{2,3\}$	$\{1,10\}$	$\{5,6\}$	$\{4,11\}$	$\{8,15\}$	$\{7,13\}$	$\{0,12\}$

Ez egy nyolcelemű nemkommutatív csoport. Ilyenből izomorfia erejéig kettő van: $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{D}_4$. Gyorsan rá lehet jönni, hogy a fenti művelettábla $\mathbf{D}_4$-gyel izomorf csoportot ad (mondjuk $\{1, 10\}$ feleljen meg a-nak, $\{2, 3\}$ pedig t-nek). Így az eredeti csoport részcsoport/normálosztóhálóját megkaphatjuk úgy, hogy a $\mathbf{D}_4$ részcsoport/normálosztóhálójához hozzáadunk alulról egy új elemet.



Feladat 6. Tekintsük az $\mathbf{A}_5$ csoport $\pi = (123)$ elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak a π permutáció van. Ezután újabb permutációkat tehetünk a halmazba: ha egy τ már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges A_5-beli elemmel vett konjugáltját, ha pedig a τ_1 és τ_2 permutációk benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a $\tau_1\tau_2$ permutációt. Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *bármely* elemét beletehessük a halmazba? Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *összes* elemét beletehessük?

Megoldás: Minden elem halmazba tétele 1 euró, így nyilván 59 euróra van szükségünk az összes elem betételéhez.

Nézzük meg, hogy anyagi helyzetünktől függően milyen permutációkat tudunk beszerezni.

- 0 *euró:* Örüljünk az (123)-nak.
- 1 *euró:* Mivel $\mathbf{A}_5$-ben a 3-ciklusok konjugáltak, akármelyik 3-ciklust be tudjuk szerezni. Mást nem, mert szorzással is csak az $(123)(123) = (132)$ adódik, ami szintén 3-ciklus. Ennyi pénzből tehát 20 permutáció érhető el.
- 2 *euró:* Mint láttuk, az első eurónkat konjugálásra tudjuk csak költeni. Újabb konjugálással nem érünk el semmit, úgyhogy szoroznunk kell. Ha ki akarunk kerülni a 3-ciklusok köréből, akkor a konjugálással kapott 3-ciklust kell megszorozni (123)-mal. A 3-ciklustól függően 20 lehetséges szorzat adódik ((123)-mal balról szorozva a 3-ciklusokat ugyanazok a permutációkat

kapjuk, mintha (123)-mal jobbról szoroztuk volna a 3-ciklusokat, mert 3-ciklus (123)-mal vett konjugáltja is 3-ciklus). A szorzatok között lesznek 3-ciklusok is, ha a szorzandó a következő listán van:

$$(123), (214), (215), (324), (325), (134), (135).$$

Egyéb szorzandó esetén új permutációt kapunk. Ennyi pénzből 33 permutáció érhető el.

- 3 *euró:* Az előző lépésben megkaptuk az identitást $((123) \cdot (132))$, és kaptunk $2+2$ ciklusszerkezetű permutációt $((123) \cdot (124) = (12)(34))$, és 5-ciklust is $((123) \cdot (145) = (12345))$. Sőt, az 5-ciklusok mindkét konjugáltsági osztályából kaptunk elemet: $(123) \cdot (154) = (12354)$, ami nem konjugáltja $\mathbf{A}_5$-ben (12345)-nek. Így konjugálással megkapható minden további permutáció.